Утверждение 1. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, c]$ и $b \in [a, c]$. Тогда f интегрируема на $[a, b]$ и $[b, c]$, причём

$$\int\limits_a^c f dx = \int\limits_a^b f dx + \int\limits_b^c f dx.$$

$\square$ По теореме Дарбу (из прошлой лекции) для любого $\varepsilon > 0$ найдётся разбиение σ отрезка $[a, c]$ такое, что

$$S_\sigma - s_\sigma < \varepsilon,$$

где S_σ и s_σ — верхняя и нижняя суммы Дарбу соответственно для разбиения σ.

Можно считать, что $b \in \sigma$, потому что, добавив к σ точку b, последнее неравенство мы сохраним.

Разобьём каждую сумму Дарбу на две:

$$S_\sigma = S_\sigma^{[a,b]} + S_\sigma^{[b,c]},$$

$$s_\sigma = s_\sigma^{[a,b]} + s_\sigma^{[b,c]}.$$

Получаем

$$\varepsilon > S_\sigma - s_\sigma = (S_\sigma^{[a,b]} - s_\sigma^{[a,b]}) + (S_\sigma^{[b,c]} - s_\sigma^{[b,c]}).$$

Значит,

$$S_\sigma^{[a,b]} - s_\sigma^{[a,b]} < \varepsilon,$$
$$S_\sigma^{[b,c]} - s_\sigma^{[b,c]} < \varepsilon.$$

Последние два неравенства выполнены для любого $\varepsilon > 0$. Значит, по теореме Дарбу функция f интегрируема на отрезках $[a, b]$ и $[b, c]$.

Также заметим, что

$$0 < S_\sigma - \int\limits_a^c f dx < \varepsilon,$$

$$0 < S_\sigma^{[a,b]} - \int\limits_a^b f dx < \varepsilon,$$

$$0 < S_\sigma^{[b,c]} - \int\limits_b^c f dx < \varepsilon.$$

Эти неравенства выполнены для любого $\varepsilon > 0$ и $S_\sigma = S_\sigma^{[a,b]} + S_\sigma^{[b,c]}$. Значит

$$\int\limits_a^c f dx = \int\limits_a^b f dx + \int\limits_b^c f dx.$$

$\blacksquare$

Упражнение 1. Доказать, что, наоборот, если f интегрируема на отрезках $[a, b]$ и $[b, c]$, то она интегрируема на отрезке $[a, b]$.

Теорема 1. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда f интегрируема на $[a, b]$.*

$\square$ По теореме Кантора функция f равномерно непрерывна на $[a, b]$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, что

$$\forall x, y \in [a, b] \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Пусть σ — разбиение отрезка $[a,b]$ и его диаметр $\lambda(\sigma)<\delta$. Тогда

$$S_\sigma - s_\sigma = \sum_{i=1}^n (\sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (\max_{[x_{i-1},x_i]} f - \min_{[x_{i-1},x_i]} f)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^n \varepsilon (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b-a).$$

Выбирая ε достаточно малым, мы получаем по теореме Дарбу, что f интегрируема на $[a,b]$. ■

Доказав теорему, мы теперь можем для непрерывной функции $f(x)$ определить функцию $F(x)=\int\limits_a^x f dt$. Оказывается, функция $F(x)$ дифференцируема.

Теорема 2. *Пусть f непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда $F'(x)=f(x)$ для любого $x\in(a,b)$, где $F(x)=\int\limits_a^x f dt$.*

□ Используя утверждение 1, получаем

$$\lim_{x\to x_0+0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0+0} \frac{\int\limits_a^x f dt - \int\limits_a^{x_0} f dt}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0+0} \frac{\int\limits_{x_0}^x f dt}{x-x_0}.$$

Заметим, что

$$\min_{[x_0,x]} f\cdot(x-x_0) \leqslant \int\limits_{x_0}^x f dt \leqslant \max_{[x_0,x]} f\cdot(x-x_0).$$

Поэтому, так как f непрерывна в точке x_0,

$$\lim_{x\to x_0+0} \frac{\int\limits_{x_0}^x f dt}{x-x_0} = f(x_0).$$

Мы получили $\lim\limits_{x\to x_0+0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$. Аналогично $\lim\limits_{x\to x_0-0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$. Значит, $F'(x)=f(x)$ для всех $x\in(a,b)$.

■

Определение 1. Пусть $F'(x)=f(x)$ на интервале (a,b) и функция $F(x)$ непрерывна. Тогда функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Следствие 1. (*формула Ньютона-Лейбница*) Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $F(x)$ — её первообразная. Тогда

$$F(b)-F(a)=\int\limits_a^b f(x)dx.$$

□ Пусть $G(x)=\int\limits_a^x f dt$. Как мы уже знаем, $G'(x)=f(x)$ для $x\in(a,b)$. Значит, $(G-F)'=0$. По теореме Лагранжа $F(x)-G(x)=C$, где C — число, не зависящее от x. Имеем

$$F(b)-F(a)=G(b)-G(a)=\int\limits_a^b f dt.$$

■

Теорема 3. (Кантора) *Пусть f непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда f равномерно непрерывна на нём.*

□ Доказательство будет опираться на компактность отрезка, что эквивалентно аксиоме полноты, принципу вложенных отрезков и теореме Кантора-Бернштейна о пределе ограниченной монотонной последовательности. Все эти утверждения о том, что в $\mathbb{R}$ нет дырок, только и всего.

Итак, функция f непрерывна. Значит, для любого $\varepsilon>0$ для каждой точки x найдётся её окрестность U_x, для каждой точки y которой выполнено $f(x)-f(y)<\varepsilon$. Окрестностью точки мы считаем любой интервал, содержащий эту точку. Окрестности U_x покрывают отрезок $[a, b]$. Значит, найдётся конечное число этих окрестностей U_{x_i}, покрывающих наш отрезок. Пусть минимальный диаметр окрестности $\min\limits_{i=1\ldots n} diam(U_i) = \delta$.

Возьмём любые две точки u и v отрезка $[a, b]$ на расстоянии меньше δ. Тогда найдутся две пересекающихся окрестности, содержащие эти точки. Пусть $u \in U_{x_i}$, $v \in U_{x_j}$ и $z \in U_{x_i} \cap U_{x_j}$. Тогда

$$|f(u) - f(v)| \leqslant |f(u) - f(z)| + |f(z) - f(v)| \leqslant$$

$$\leqslant |f(u) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(z)| + |f(z) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(v)| < 4\varepsilon.$$

■

Равномерно непрерывные функции — это ровно те функции, которые можно продолжать по непрерывности. Так что прежде, чем продолжать функцию по непрерывности, проверьте её равномерную непрерывность. Это один из способов определить степенную функцию для любых действительных значений переменной.