Интеграл Римана

Цель этой лекции — определить понятие "площади под графиком функции". Для этого введём несколько определений.

Определение 1. *Разбиением отрезка* $[a, b]$ называется всякий конечный набор точек $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ с условием $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Разность $x_i - x_{i-1}$ обозначается Δx_i.
Диаметром разбиения σ называется число $\lambda(\sigma) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i$.

Определение 2. *Отмеченным разбиением отрезка* $[a, b]$ называется пара (σ, ξ), где $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, а $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — набор точек из отрезков разбиения: $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$.

Определение 3. Пусть f — функция на отрезке $[a, b]$, а (σ, ξ) — отмеченное разбиение этого отрезка. *Интегральной суммой* функции f при отмеченном разбиении (σ, ξ) называется

$$\sum_{(\sigma,\xi)} f\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Таким образом, интегральная сумма — это площадь под графиком, но приближённо.

Определение 4. Пусть f — функция на отрезке $[a, b]$. *Интегралом Римана* функции f по отрезку $[a, b]$ называется такое число $A \in \mathbb{R}$, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \lambda(\sigma) < \delta \Rightarrow |A - \sum_{(\sigma,\xi)} f\Delta x| < \varepsilon,$$

что можно записать по-другому:

$$A = \lim_{\lambda(\sigma)\to 0} \sum_{(\sigma,\xi)} f\Delta x,$$

где предел берется по всем отмеченным разбиениям (σ, ξ) отрезка $[a, b]$ при $\lambda(\sigma) \to 0$. Обозначение: $A = \int\limits_a^b f(x)dx$. Функция f называется *интегрируемой по Риману* на отрезке $[a, b]$, если этот предел (т. е. интеграл) существует. Обозначение: $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Смысл этого определения: если взять достаточно мелкое разбиение, то интегральная сумма будет близка к некоторому числу $A \in \mathbb{R}$. Это число и называется интегралом.

Зачем в обозначении писать какие-то лишние буквы dx? Пока это пусть будет для вас просто обозначением того, какая у нас переменная. А потом когда-нибудь может быть вы поймете более глубокий смысл этого обозначения.

Пример. Это определение страшное, длинное и непонятное. Давайте разберём пример — возьмем $f = c$ на $[a, b]$. Действуем по определению: возьмём любое разбиение. Какой же получится интегральная сумма? Она всегда равна $c(b - a)$, что и есть площадь под графиком, то есть интеграл функции $f = c$ на отрезке $[a, b]$.

Мы разобрали пока простой пример — с определением и надо разбираться сначала на простых примерах.

Утверждение 1. Интегрируемая на $[a, b]$ функция f ограничена на этом отрезке.

$\square$ Предположим противное и будем действовать по определению интегрируемости функции f. Если функция неограничена на всём отрезке, то и на каком-то отрезке разбиения она неограничена. Возьмём этот отрезок и, не меняя разбиения, поменяем только отметку на этом разбиении. Можно выбрать её так, чтобы значение функции в этой точке было сколь угодно большим. Тем самым, в любой интегральной сумме мы можем одно из слагаемых сделать сколь угодно большим, не меняя остальные слагаемые. Значит, предела интегральных сумм нет, противоречие. $\blacksquare$

Но как быть с более сложными функциями типа x^2? Наше страшное условие с ε и δ тяжело будет проверить для каждой конкретной функции. Чтобы упростить себе жизнь, докажем несколько теорем.

Когда мы брали разбиение, на каждом подотрезке $[x_{i-1}, x_i]$ мы выбирали любое ξ_i. Мы можем выбрать его так, чтобы значение функции было сколь угодно близким к максимальному значению на этом подотрезке, или к минимальному. Давайте эту мысль чётко запишем.

Определение 5. Пусть σ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$, f — функция, ограниченная на этом отрезке. Положим $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$. Числа $s_\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ и $S_\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ называются соответственно *нижней и верхней суммами Дарбу* функции f при разбиении σ.

Суммы Дарбу похожи на интегральные суммы. Ясно, что любая интегральная сумма для данного разбиения заключена между верхней и нижней суммами для этого разбиения.

Легко видеть, что при измельчении разбиения верхняя сумма уменьшается, а нижняя — увеличивается:

Лемма 1. Пусть разбиение σ' является измельчением разбиения σ. Тогда $S_\sigma \geqslant S_{\sigma'}$ и $s_\sigma \leqslant s_{\sigma'}$.

□ Это легко доказать по индукции по числу добавленных к σ точек. ■

Лемма 2. Возьмем два произвольных разбиения σ и σ'. Тогда $s_\sigma \leqslant S_{\sigma'}$.

□ Это интуитивно ясно, но как это доказать? Возьмем разбиение $\sigma'' = \sigma \cup \sigma'$, являющееся измельчением обоих разбиений — оно просто содержит все точки обоих разбиений. И применим лемму 1. Ясно, что $S_{\sigma'} \geqslant S_{\sigma''} \geqslant s_{\sigma''} \geqslant s_\sigma$. ■

Ура! Теперь мы знаем, что любая нижняя сумма Дарбу не превосходит любой верхней суммы Дарбу. Теперь мы вправе ввести

Определение 6. Для ограниченной на отрезке $[a, b]$ функции f числа $I_* = \sup s_\sigma$ и $I^* = \inf S_\sigma$, где супремум и инфимум берутся по всем разбиениям σ отрезка, называются *нижним и верхним интегралами Дарбу* функции f на отрезке $[a, b]$.

Заметим, что оба числа I_* и I^* существуют! Ибо все нижние суммы Дарбу ограничены сверху — любой верхней суммой Дарбу, и можно взять супремум. Аналогично, все верхние суммы Дарбу ограничены снизу — любой нижней суммой Дарбу, и можно взять инфимум.

Ясно, что оба числа I_* и I^* очень похожи на интеграл, и поэтому должны быть равны. Но бывают ограниченные на отрезке функции, для которых это не так.

Теперь мы готовы к доказательству следующей теоремы.

Теорема 1. (Дарбу) *Функция f интегрируема (по Риману) на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда она ограничена на этом отрезке, и $I_* = I^*$. При этом $\int\limits_a^b f(x)\,dx = I_* = I^*$.*

Неясно, каков практический смысл этого определения — она ведь не дает способа вычислить интеграл. Но она дает способ проверки — понять, существует ли интеграл вообще. Если мы с помощью этой теоремы проверили для какой-то функции, что она интегрируема, то уже можно искать ее интеграл проще, например выбирая конкретную последовательность разбиений.

Но давайте докажем теорему.

□ Сначала в простую сторону — пусть f интегрируема и A — её интеграл. Тогда f ограничена (вы это должны еще помнить), и значит, оба числа I_* и I^* существуют.

Докажем по отдельности, что каждое из этих чисел равно интегралу функции.

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и возьмем такое разбиение σ, что будет выполнено неравенство: $I_* - s_\sigma < \varepsilon$ (это возможно по определению I^*).

Существует $\delta > 0$ такое, что для любого отмеченного разбиения с диаметром, меньшим δ, соответствующая интегральная сумма (для данного отмеченного разбиения) отличается от интеграла меньше, чем на ε.

Теперь измельчим разбиение σ до произвольного разбиения σ' так, чтобы диаметр нового разбиения σ' был меньше δ. По лемме 1, $I_* - s_{\sigma'} < \varepsilon$. Для разбиения σ' выберем отметки ξ' так, чтобы

$$f(\xi_i') - \inf_{[x_{i-1}',x_i']} f(x) < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i') \cdot (x_i' - x_{i-1}') - s_{\sigma'} = \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i') - \inf_{[x_{i-1}',x_i']} f(x)) \cdot (x_i' - x_{i-1}') < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (x_i' - x_{i-1}') = \varepsilon.$$

Следовательно,
$$|A - I_*| = |(A - s_{\sigma'}) + (s_{\sigma'} - I_*)| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \Big(A - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i') \cdot (x_i' - x_{i-1}')\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i') \cdot (x_i' - x_{i-1}') - s_{\sigma'}\Big) + \Big(s_{\sigma'} - I^*\Big) \right| \leqslant 3\varepsilon.$$

Последнее верно для любого $\varepsilon > 0$, а значит, $A = I_*$. Аналогично $A = I^*$.

Теперь будем доказывать в обратную сторону. То есть функция f ограничена на $[a, b]$ и $I_* = I^*$, а нам нужно доказать, что функция f интегрируема.

Докажем, что число $I = I_* = I^*$ будет интегралом. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и возьмём такое разбиение $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, что $S_\sigma - s_\sigma < \varepsilon$ (подумайте, почему последнее возможно). Так как функция ограничена, то можно считать, что $|f| < M$ на отрезке $[a, b]$. Возьмём в качестве δ наименьшее из чисел $\dfrac{\varepsilon}{nM}$ и $\min\limits_{i=1\dots n}(x_i - x_{i-1})$. Для любого отмеченного разбиения σ' с отметками ξ_i' и диаметром, меньшим δ разобьём интегральную сумму на две подсуммы, в одной будут отрезки $[x_{i-1}', x_i']$, которые целиком лежат внутри какого-то отрезка σ и на все остальные:
$$\sum_{i=1}^{n'} f(\xi_i') \cdot (x_i' - x_{i-1}') = \sum_{\exists j : [x_{i-1}', x_i'] \subset [x_{j-1}, x_j]} f(\xi_i') \cdot (x_i' - x_{i-1}') + \sum_{\exists j : x_j \in [x_{i-1}', x_i']} f(\xi_i') \cdot (x_i' - x_{i-1}')$$

Вторая — мала:
$$\left| \sum_{\exists j : x_j \in [x_{i-1}', x_i']} f(\xi_i') \cdot (x_i' - x_{i-1}') \right| \leqslant nM\delta = \varepsilon$$

А первая близка к S_σ:
$$\left| \sum_{\exists j : [x_{i-1}', x_i'] \subset [x_{j-1}, x_j]} f(\xi_i') \cdot (x_i' - x_{i-1}') - S_\sigma \right| =$$
$$= \left| \Big(\sum_{\exists j : [x_{i-1}', x_i'] \subset [x_{j-1}, x_j]} f(\xi_i') \cdot (x_i' - x_{i-1}') - \sum_{\exists j : [x_{i-1}', x_i'] \subset [x_{j-1}, x_j]} \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f(x) \cdot (x_i' - x_{i-1}') \Big) + \right.$$
$$\left. + \Big(\sum_{\exists j : [x_{i-1}', x_i'] \subset [x_{j-1}, x_j]} \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f(x) \cdot (x_i' - x_{i-1}') - S_\sigma \Big) \right| \leqslant$$
$$\left| \sum_{\exists j : [x_{i-1}', x_i'] \subset [x_{j-1}, x_j]} \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f(x) \cdot (x_i' - x_{i-1}') - \sum_{\exists j : [x_{i-1}', x_i'] \subset [x_{j-1}, x_j]} \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f(x) \cdot (x_i' - x_{i-1}') \right| +$$
$$+ nM\delta \leqslant |s_\sigma - S_\sigma| + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon$$

Так как $|I^* - S_\sigma| \leqslant |s_\sigma - S_\sigma| \leqslant \varepsilon$, то интегральная сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i') \cdot (x_i' - x_{i-1}')$ отличается от I^* не более, чем на 3ε. ■

Следствие. Монотонная на $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке.

□ Пусть функция f монотонно не убывает, а σ — разбиение. Тогда
$$S_\sigma - s_\sigma = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\lambda(\sigma) = (f(b) - f(a))\lambda(\sigma).$$

Выбирая диаметр разбиения достаточно малым, получаем $I^* = I_*$. ■