

Определение 1. Если функция f представима в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $k, b \in \mathbb{R}$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) \rightarrow 0$, то прямая $y = kx + b$ называется *асимптотой графика* функции f при $x \rightarrow +\infty$.

Определение 2. Если функция f представима в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $k, b \in \mathbb{R}$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha(x) \rightarrow 0$, то прямая $y = kx + b$ называется *асимптотой графика* функции f при $x \rightarrow -\infty$.

Определение 3. Если предел функции f в точке x_0 равен ∞ (при стремлении справа или слева), то прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции f .

1. Найдите асимптоты функций

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|--|
| а) $\frac{1}{x}$; | б) $\frac{ax+b}{cx+d}$; | в) $x + \frac{1}{x}$; |
| г) $\frac{x^2}{x-1}$; | д) $\frac{1}{1-x^2}$; | е) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$; |
| ж) $\frac{x^3}{6x^2-8-x^4}$; | з) $x + \frac{1}{x^2}$; | и) $x + \frac{x^2}{x^2+1}$; |
| к) $\frac{x^2-2x+3}{x+2}$; | л) $\frac{2x^4+x^3+1}{x^3}$; | м) $\frac{x^3}{(x+1)^2}$; |
| н) $\frac{x^5}{x^4+1}$. | | |

2. Для каждого из графиков, приведенных на рисунке подберите в списке формул ту, которой может быть задан этот график:

- | | | |
|--|-----------------------------------|--|
| а) $y = (x-2)(x+1)^2$; | б) $y = x(x^2-1)(x-1)$; | в) $y = (x-2)^2(x+1)$; |
| г) $y = (x+1)^2(2-x)$; | д) $y = x(x^2-1)(x+1)$; | е) $y = (x-2)^2(x+1)^2$; |
| ж) $y = x^3(x^2-1)(x+1)$; | з) $y = (x^2-1)^2$; | и) $y = (x^2-1)^3$; |
| к) $y = \frac{x^2}{x^2-4}$; | л) $y = \frac{1+x+x^2}{1+x^2}$; | м) $y = \frac{1-x+x^2}{1+x^2}$; |
| н) $y = \frac{1+x+2x^2}{1+x^2}$; | о) $y = \frac{2+x^2}{1+x^2}$; | п) $y = \frac{2+x^4}{1+x^2}$; |
| р) $y = \frac{2+x^2}{1+x^4}$; | с) $y = \frac{1-x^2}{x^2-4}$; | т) $y = \frac{x^4-1}{x^2-4}$; |
| у) $y = \frac{x^2-1}{x^2-4}$; | ф) $y = \frac{x^2-1}{x(4-x^2)}$; | х) $y = \frac{(x^2-1)(x-1)}{x(4-x^2)}$; |
| ц) $y = \frac{(x^2-1)(x-1)}{x^2(4-x^2)}$; | ч) $y = -x^5 + 2x^3 - x$. | |

3. Найдите область определения функции, множество значений, корни, асимптоты и постройте график функции; там, где это возможно, используйте множество значений функции для уточнения расположения точек экстремума:

- | | | |
|--------------------------------------|--|------------------------------------|
| а) $y = \frac{x^2+1}{x}$; | б) $y = \frac{3x}{1+x^2}$; | в) $y = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$; |
| г) $y = \frac{x^2+8x-6}{x}$; | д) $y = \frac{x^2}{x+4}$; | е) $y = \frac{x^2}{ x +1}$; |
| ж) $y = \frac{x^2}{ x -1}$; | з) $y = \frac{2-4x^2}{1-4x^2}$; | и) $y = \frac{x-1}{x^2-2x}$; |
| к) $y = \frac{(x-3)^2}{4x-4}$; | л) $y = \frac{x^2+2x-3}{x}$; | м) $y = \frac{2x^2-6}{x-2}$; |
| н) $y = \frac{4}{2x+3-x^2}$; | о) $y = \frac{6x+9-3x^2}{x^2-2x+13}$; | п) $y = \frac{(x-1)^2}{x^2}$; |
| р) $y = \frac{4x^2+9}{4x+8}$; | с) $y = \frac{4x}{(x+1)^2}$; | т) $y = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$; |
| у) $y = \frac{2x^2+x-1}{2x^2-x-1}$. | | |

4. Найдите асимптоты, корни, промежутки знакопостоянства; постройте эскиз графика функции:

- | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| а) $y = \frac{x^2-1}{x}$; | б) $y = \frac{x^2+1}{x+1}$; | в) $y = \frac{x^2-1}{x-1}$; |
| г) $y = \frac{x^2+x}{x-1}$; | д) $y = \frac{x^3}{1-x^3}$; | е) $y = \frac{x^3}{x^2+1}$; |
| ж) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$; | з) $y = \frac{4x^3+9x}{16-x^2}$; | и) $y = \frac{4x^3-9x}{16-x^2}$; |
| к) $y = \frac{x^3-16x}{x^2-25}$. | | |