

1. $\sin^{2012} x + \cos^{2012} x = 1$.
2. $\sqrt{\sin^3 x} + \sqrt{\cos^3 x} = \sqrt{2}$.
3. $\sin x + \sin 9x = 2$.
4. $2^{-\cos x} = \log_{\pi} x + \log_x \pi$.
5. $2^{1-|4x-1|} = \operatorname{tg} \pi x + \operatorname{ctg} \pi x$.
6. $x^2 = -\cos x$.
7. $2 \cos \frac{\pi x}{2} = x^2 + 4x + 5$.
8. $2^x = 3 - x$.
9. $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \geq 1$.
10. $\sqrt{4+x} + \sqrt[4]{16-x} > 2$.
11. $\arcsin(x^2 - 2x + 2) = \frac{\pi x}{2}$.
12. $2 \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.
13. $\frac{1}{2^{\sin^2 x}} + \frac{1}{2^{\cos^2 x}} = \sin x \cos x$.
14. $\log_3(8 + 2x - x^2) = 2^{x-1} + 2^{1-x}$.
15. $\log_2(3 - |\cos x|) = 2^{-|\pi-x|}$.
16. $\sin^2 x + \frac{1}{4} \sin^2 3x = \sin x \sin^2 3x$.
17. $\sin x(\cos 2x + \cos 6x) + \cos^2 x = 2$.
18. $\cos \frac{16\pi}{16x^2-8x+49} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \pi x + \operatorname{ctg}^2 \pi x}$.
19. $2^{-|x-2|} \cdot \log_2(4x - x^2 - 2) \geq 1$.
20. $(x^2 - 2x + 3)(y^2 + 6y + 12) = 6$.
21. $\log_2 \left(\cos^2 xy + \frac{1}{\cos^2 xy} \right) = \frac{1}{y^2 - 2y + 2}$.
22. $\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \right)^2 = 12 + \frac{1}{2} \sin y$.
23. $\cos x - y^2 - \sqrt{y - x^2 - 1} \geq 0$.
24. $x = \sin \frac{\pi(x+1)}{3} \sin \frac{\pi(1-x)}{3}, 0 \leq x \leq 1$.
25. $x^2 + 4x \cos xy + 4 = 0$.
26. $\cos x + \cos y - \cos(x+y) = \frac{3}{2}$.
27. $\operatorname{tg}^2 x + 2(\sin y + \cos y) \operatorname{tg} x + 2 = 0$.
28. $\begin{cases} |xy - 4| = 8 - y^2, \\ xy = 2 + x^2. \end{cases}$
29. $\begin{cases} y^2 - |xy| + 2 = 0, \\ 8 - x^2 = (x + 2y)^2. \end{cases}$
30. а) $12x + \sqrt{3x^4 + 4x^5 - 4x^6} \cdot \log_2 x^2 > 3\sqrt{3 + 4x - 4x^2} + 4x^3 \cdot \log_4 x^4$;
б) $\sqrt{2 - 5x - 3x^2} + 2x > 2x \cdot 3^x \sqrt{2 - 5x - 3x^2} + 4x^2 \cdot 3^x$.
31. а) $\frac{6-3^{x+1}}{x} > \frac{10}{2x-1}$;
б) $\frac{6}{2x+1} > \frac{1+\log_2(2+x)}{x}$.
32. $\begin{cases} |x+2| - 2 \leq x, \\ (2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^{1-x}) \sin \frac{\pi x}{2} + \cos \pi x = 3 + 2^{2x-1}. \end{cases}$
33. $\begin{cases} |x+3| - 3 \leq x, \\ (2^{x+2} + 2^x + 2^{-x}) \cos \frac{\pi x}{2} = \cos \pi x + 3 + 2^{2x+1}. \end{cases}$
34. а) $\sqrt{x^2 - 4}(3 \sin^2 x + 10 \sin x \cos x + 11 \cos^2 x - 2\sqrt[3]{301}) = 5\pi^2 - 4(\arcsin y)^2 - 4(\arccos y)^2$;
б) $\sqrt{2 - |y|}(5 \sin^2 x - 6 \sin x \cos x - 9 \cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}) = (\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 - \frac{5}{4}\pi^2$;
35. $\begin{cases} (2-x)(3x-2z) = 3-z, \\ y^3 + 3y^2 = x^2 - 3x + 2, \\ z^2 + y^2 = 6z, \\ z \leq 3. \end{cases}$
36. $\begin{cases} y+2 = (3-x)^2, \\ (2z-y)(y+2) = 9+4y, \\ x^2 + z^2 = 4x, \\ z \geq 0. \end{cases}$
37. $\begin{cases} y \sin x = \log_2 \left| \frac{y \sin x}{1+3y} \right|, \\ (6y^2 + 2y)(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x}) = \\ = 25y^2 + 6y + 1 \\ |y| \leq 1. \end{cases}$
38. $\begin{cases} (3-y^2) \cos x^2 = \log_3 \left| \frac{8+y}{y(1-\sin^3 x)} \right|, \\ (y^2 + 8y)(3^{2+2\sin^4 x} + 3^{2\cos^4 x + \sin^2 3x - 4x}) = \\ = 2y^2 + 16y + 64, \\ 1 \leq y < 10. \end{cases}$
39. $\begin{cases} \sqrt{\frac{(x-y)^2}{2}} - (x-y)^4 = y^2 - 2x^2, \\ y \geq 4x^4 + 4yx^2 + \frac{1}{2} \end{cases}$
40. $\begin{cases} y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{xy - x^2 y^2}, \\ 4xy^3 + y^3 + \frac{1}{2} \geq 2x^2 + \sqrt{1 + (2x - y)^2}. \end{cases}$
41. а) $4(3\sqrt{4x - x^2} \sin^2 \frac{x+y}{2} + 2 \cos(x+y)) = 13 + 4 \cos^2(x+y)$;
б) $\frac{3+2 \cos(x-y)}{2} = \sqrt{3 + 2x - x^2} \cos^2 \frac{x-y}{2} + \frac{\sin^2(x-y)}{2}$.

42. а) $\sqrt{15x^2 + 2y^2 - 2z^2 - 3\sqrt{5}x - 2y + 10z - 4} + \sqrt{5x^2 - 2\sqrt{5}x \cos \pi y \cos \pi z + 1} = 0$;
 б) $\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 10z + 6y + \frac{\sqrt{3}}{2}x - 17} + \sqrt{3x^2 - 2\sqrt{3}(\cos \pi y + \cos \pi z)x + 4} = 0$.
43. а) $\sin 3x - 2 \sin 18x \sin x = 3\sqrt{2} - \cos 3x + 2 \cos x$;
 б) $2\sqrt{3} \sin 5x - \sqrt{3} \sin x = \cos 24x \cos x + 2 \cos 5x - 6$.
44. а) Среди всех решений (x, y, z, v) системы $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z^2 + v^2 = 9, \\ xv + yz \geq 6 \end{cases}$ найдите такие, при которых выражение $x + z$ принимает наибольшее значение.
- б) Среди всех решений (a, b, c, d) системы $\begin{cases} a^2 + b^2 = 9, \\ c^2 + d^2 = 16, \\ ad + bc \geq 12 \end{cases}$ найдите такие, при которых выражение $b + d$ принимает наибольшее значение.
45. а) Найдите наименьшее из значений, которое принимает выражение $x + 5y$, если x, y положительны и удовлетворяют неравенству $x^2 - 6xy + y^2 + 21 \leq 0$.
 б) Найдите наибольшее из значений, которое принимает выражение $x + 3y$, если x, y удовлетворяют неравенству $x^2 + xy + 4y^2 \leq 3$.
46. а) Найдите наибольшее из значений z , для которых существуют числа x, y , удовлетворяющие уравнению $2x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + xz + yz = 4$.
 б) Найдите наименьшее из значений x , для которых существуют числа y, z , удовлетворяющие уравнению $x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1$.
47. Докажите, что для всех положительных x верно неравенство
 а) $x^2 + \pi x + 4\pi \cos x > 0$; б) $x^2 + \pi x + \frac{15}{2}\pi \sin x > 0$.
48. а) $(2x + 1)(2 + \sqrt{(2x + 1)^2 + 3}) + 3x(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) = 0$;
 б) $(4x + 1)(1 + \sqrt{(4x + 1)^2 + 7}) + 3x(1 + \sqrt{9x^2 + 7}) = 0$.
49. а) Числа a, b, c таковы, что $2a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $a - 2b + c$?
 б) Числа a, b, c таковы, что $a^2 + 3b^2 + c^2 = 2$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $2a + b - c$?
50. Найдите все тройки целых чисел (x, y, z) для которых справедливо неравенство
 а) $\frac{1}{\sqrt{7+2x-4y+3z}} + \frac{3}{\sqrt{2y+2z-5x}} > \frac{2}{\sqrt{3x+2y-5z-4}} + x^2 + 7x + 11$;
 б) $\log_2(2x + 3y - 6z + 3) + \log_2(3x - 5y + 2z - 2) + \log_2(2y + 4z - 5x + 2) > z^2 - 9z + 17$.
51. Найдите наименьшее значение выражения $|x + y| + \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2}$.
52. Решите уравнение $\log_2(3x + 1) \log_5(3x + 4) + \log_3(3x + 2) \log_4(3x + 3) = 2 \log_3(3x + 2) \log_5(3x + 4)$
53. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\sqrt{-3x^3 + 8x^2 + 47x - 52} = 6\sqrt{6x - x^2 - 5} + \sqrt{a^2 - 10a + 21}$$

имеет единственное решение.

54. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2} + x_1} + \sqrt{\frac{1}{2} + x_2} + \dots + \sqrt{\frac{1}{2} + x_{10}} = 8, \\ \sqrt{\frac{1}{2} - x_1} + \sqrt{\frac{1}{2} - x_2} + \dots + \sqrt{\frac{1}{2} - x_{10}} = 6. \end{cases}$