

По определению, положим

$$e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b).$$

$$\mathcal{L}nz = \mathcal{L}n(re^{i\varphi}) = \{\ln r + 2\pi\varphi k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

1. Вычислите

- а) $e^{1+\pi i}$; б) e^{2+i} ; в) $\mathcal{L}n1$; г) $\mathcal{L}n(-1)$; д) $\mathcal{L}n(-i)$;
 е) $\mathcal{L}ni$; ж) $\mathcal{L}n(1+i)$; з) $\mathcal{L}n((-1) + i\sqrt{3})$; и) $\mathcal{L}n(1 - \sqrt{3})$.

2. Докажите тригонометрическую формулу:

- а) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$; б) $\cos(\frac{\pi}{2} + z) = -\sin z$;
 в) $1 - \cos z = 2 \sin^2 \frac{z}{2}$; г) $\sin z + \sin w = 2 \sin \frac{z_1+z_2}{2} \cdot \cos \frac{z_1-z_2}{2}$.

3. Решите уравнение:

- а) $\sin z = 3$; б) $\cos z = -1$; в) $\operatorname{tg} z = i$; г) $e^z = -1$.

4. При каких z будут действительны:

- а) $\sin z$; б) $\cos z$.

5. Вычислите

- а) i^i ; б) $(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^i$; в) i^{1+2i} .

6. Рассмотрим отображение $f(z) = e^z$ на комплексной плоскости. Найдите образы прямых:

- а) $\operatorname{Re} z = 0$; б) $\operatorname{Re} z = a$; в) $\operatorname{Im} z = \frac{\pi}{4}$; г) $\operatorname{Im} z = a$.