

1. Запишите в тригонометрической форме следующие комплексные числа:

- а) $-4i$; б) $\sqrt{3} - i$; в) $-3 + 4i$;
 г) $-\cos \frac{\pi}{12} - i \cdot \sin \frac{\pi}{12}$; д) $1 - \cos 2\alpha - i \cdot \sin 2\alpha$, $(\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi)$.

2. Упростите выражение

- а) $(1 - i\sqrt{3})^6$; б) $(\sin \alpha + i \cos \alpha)^3$; в) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{13}$;
 г) $-\frac{(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3})(1+i\sqrt{3})^7}{i^5}$; д) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{1998}$; е) $(\sqrt{3} + i)^7 + (\sqrt{3} - i)^7$;
 ж) z^{17} , если $z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$; з) $z^n + \frac{1}{z^n}$, если $z + \frac{1}{z} = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Найдите все значения корней:

- а) $\sqrt{i}$; б) $\sqrt[4]{-1}$; в) $\sqrt{-8i}$;
 г) $\sqrt[3]{1-i}$; д) $\sqrt[6]{-1}$; е) $\sqrt[8]{i\sqrt{3}-1}$.

4. Решите уравнения:

- а) $z^5 - 1 - i\sqrt{3} = 0$; б) $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$;
 в) $z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 16z + 12 = 0$; г) $z^5 + 2z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 16z + 32 = 0$;
 д) $z^6 + (8-i)z^3 + 4(1+i)^6 = 0$.

5. Составьте уравнение пятой степени, имеющее корни $z_1 = i$, $z_2 = 2i$, $z_3 = z_4 = 1$, $z_5 = -i$.

6. Составьте уравнение четвёртой степени, имеющее корни $z_1 = z_2 = z_3 = 1 + i$, $z_4 = 2$.

7. Составьте уравнение наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющее корни $z_1 = z_2 = 2 - i$, $z_3 = i$.

8. Сумма кубов уравнения $z^3 + z^2 + z - \lambda = 0$ равна (-1) , $\lambda \in \mathbb{R}$. Найдите это λ и решите уравнение.

9. Докажите, что число $1 + i$ является корнем уравнения $3z^4 - 5z^3 + 3z^2 + 4z + 2 = 0$ и найдите остальные корни этого уравнения.

10. Число $z = \frac{1+i}{1-i}$ является корнем уравнения $2z^3 - a^2z^2 + 2a^2z - a - 2 = 0$, $a \in \mathbb{R}$. Найдите значение a и решите уравнение при этом a .

11. Найдите сумму всех таких чисел z , что $z^4 = \sqrt{3} - i$. Укажите одно из этих чисел.

12. Разложите на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами многочлены
 а) $x^{2n} - 1$; б) $x^{2n} + 1$; в) $x^{2n+1} + 1$.

13. Докажите, что при любых натуральных n и k число $(n+1)^{2k+1} + n^{k+2}$ делится на $n^2 + n + 1$.

14. При каких целых n число $n^{44} + n + 1$ простое?