

Комплексным числом называется число вида $z = x + yi$, где x, y — действительные числа, а i — так называемая *мнимая единица*, то есть число, которое в квадрате равно -1 . Сложение и умножение комплексных чисел определяется при помощи раскрытия скобок и приведения подобных членов.

Свойства комплексных чисел.

Для комплексных чисел выполнены следующие свойства:

- $\forall z, w \quad z + w = w + z$ (коммутативность сложения);
- $\forall z, w, y \quad (z + w) + y = z + (w + y)$ (ассоциативность сложения);
- $\forall z \quad z + 0 = z$;
- $\forall z \quad \exists w \quad z + w = 0$, элемент w называется *противоположным* к z и обозначается $-z$;
- $\forall z, w \quad z \cdot w = w \cdot z$ (коммутативность умножения);
- $\forall z, w, y \quad (z \cdot w) \cdot y = z \cdot (w \cdot y)$ (ассоциативность умножения);
- $\forall z \quad z \cdot 1 = z$;
- $1 \neq 0$;
- $\forall z \neq 0 \quad \exists w \quad z \cdot w = 1$, элемент w называется *обратным* к z и обозначается $\frac{1}{z}$ или z^{-1} ;
- $\forall z, w, y \quad z \cdot (w + y) = z \cdot w + z \cdot y$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

1. Докажите все свойства комплексных чисел.

2. Запишите в алгебраической форме следующие комплексные числа:

- а) $(2 - i)(i - 3)$; б) $\frac{13-i}{2i-3}$; в) $\frac{1+i}{2-i} + \frac{1-i}{4+2i}$; г) $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2i}\right)^2$; д) $\frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$.

3. Нарисуйте на комплексной плоскости множества, задающиеся следующими условиями:

- а) $|z| \leq 1$; б) $|z - i| \leq 1$; в) $|z| = z$; г) $|z - i| \leq 1$;
 д) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| < 1$; е) $|\operatorname{Arg} \frac{z-i}{z+i}| = \frac{\pi}{2}$; ж) $\operatorname{Re}(z^2) \leq 1$; з) $|iz + 1| = 3$;
 и) $|z - i| + |z + i| = 2$; к) $\operatorname{Im} \frac{1}{z} < -\frac{1}{2}$; л) $\frac{\pi}{6} < \operatorname{Arg}(z - i) < \frac{\pi}{3}$.

4. Запишите с помощью неравенств следующие множества точек на комплексной плоскости:

- а) полуплоскость, расположенная строго левее мнимой оси;
 б) первый квадрант, не включая координатных осей;
 в) множество точек, отстоящих от мнимой оси на расстоянии, меньшем двух;
 г) полукруг радиуса 1 (без полуокружности) с центром в точке O , расположенный не выше действительной оси.

5. Вычислите

- а) $\sqrt{3 - 4i}$; б) $\sqrt{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{24 + 70i}$;
 г) $\sqrt{1 + i\sqrt{3}}$; д) $\sqrt{-7 - 24i}$; е) $\sqrt{12 - 5i}$.

6. Решите в комплексных числах следующие квадратные уравнения:

- а) $z^2 + z + 1 = 0$; б) $z^2 + 4z + 29 = 0$; в) $z^2 - (2 + i)z + 2i = 0$;
 г) $z^2 - (3 + 2i)z + 6i = 0$; д) $z^2 - (3 - 2i)z + 5 - 5i = 0$; е) $z^2 - (5 + 2i)z + 5 + 5i = 0$.

7. Решите в комплексных числах уравнения:

- а) $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z - 15 = 0$; б) $z^3 + 3z^2 + 3z + 3 = 0$;
 в) $z^4 + (z - 4)^4 = 32$; г) $\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right) = i$.

8. Найдите все комплексные числа z , удовлетворяющие условию:

- а) $(1 + i)z = 3 - iz$; б) $z^2 + \bar{z} = 0$; в) $z^2 + |z| = 0$; г) $z^2 = \bar{z}^2$;
 д) $|z| - iz = 1 - 2i$; е) $z^2 + z|z| + |z^2| = 0$; ж) $z^2 = i$; з) $z^2 = 3 + 4i$;
 и) $(i - z)(1 + 2i) + (1 - iz)(3 - 4i) = 1 + 7i$; к) $|z + 1 - i| = |3 - z + 2i| = |z + i|$.