

Мы хотим построить модель действительных чисел. Сейчас, имея множество $\mathbb{Q}$ мы построим новое множество $\mathbb{R}$, которое содержит $\mathbb{Q}$, введем сложение и умножение, порядок на $\mathbb{R}$ и проверим аксиому полноты для $\mathbb{R}$.

Фундаментальные последовательности.

Определение 1. Последовательность $a_n \in \mathbb{Q}$ называется *фундаментальной*, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N |a_n - a_m| < \varepsilon$.

1. Докажите, что если последовательность a_n имеет предел, то она фундаментальна.

2. Докажите, что фундаментальная последовательность ограничена.

Определение 2. Будем называть две последовательности a_n и b_n эквивалентными, если $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$.

Обозначение: $a_n \sim b_n$.

3. Докажите следующие свойства эквивалентности:

При всех a_n, b_n, c_n :

- а) (рефлексивность) $a_n \sim a_n$;
- б) (симметричность) Если $a_n \sim b_n$, то $b_n \sim a_n$;
- в) (транзитивность) Если $a_n \sim b_n$, и $b_n \sim c_n$, то $a_n \sim c_n$.

Рассмотрим множество всех фундаментальных последовательностей M . Для каждой последовательности $x_n \in M$ определим *класс эквивалентности* — множество всех последовательностей, эквивалентных данной: $[x_n] = \{a_n \in M | a_n \sim x_n\}$.

4. Докажите следующие свойства:

- а) Если $[x_n] \cap [y_n] \neq \emptyset$, то $[x_n] = [y_n]$.
- б) $M = \cup_{x_n \in M} [x_n]$.

Таким образом, M разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности. Определим множество $\mathbb{R}$ как множество данных классов: $\mathbb{R} = \{[x_n] | x_n \in M\}$.

$\mathbb{Q}$ — подмножество $\mathbb{R}$

Для каждого $q \in \mathbb{Q}$ существует фундаментальная последовательность x_n : $x_n = q$ при всех n . Класс $[x_n]$ будем обозначать через $[q]$ или просто через q .

В частности, в множестве $\mathbb{R}$ теперь есть 0 и 1.

Операции на $\mathbb{R}$.

Определим сложение, умножение на $\mathbb{R}$.

Сложение: $[x_n] + [y_n] = [x_n + y_n]$; умножение: $[x_n] \cdot [y_n] = [x_n \cdot y_n]$;

5. Проверьте корректность (то есть независимость от выбора представителя классов $[x_n]$ и $[y_n]$) определений сложения и умножения.

6. Проверьте, что для $q, r \in \mathbb{Q}$ $[q] + [r] = [q + r]$ и $[q \cdot r] = [q] \cdot [r]$.

7. Проверьте, что выполняются следующие аксиомы:

Для всех $a, b, c \in \mathbb{R}$:

- а) $\forall a, b \quad a + b = b + a$ (*коммутативность сложения*);
- б) $\forall a, b, c \quad (a + b) + c = a + (b + c)$ (*ассоциативность сложения*);
- в) $\forall a \quad a + 0 = a$;
- г) $\forall a \quad \exists b \quad a + b = 0$, элемент b называется *противоположным* к a и обозначается $-a$;
- д) $\forall a, b \quad a \cdot b = b \cdot a$ (*коммутативность умножения*);
- е) $\forall a, b, c \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (*ассоциативность умножения*);
- ж) $\forall a \quad a \cdot 1 = a$;
- з) $1 \neq 0$;
- и) $\forall a \neq 0 \quad \exists b \quad a \cdot b = 1$, элемент b называется *обратным* к a и обозначается $\frac{1}{a}$ или a^{-1} ;
- к) $\forall a, b, c \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (*дистрибутивность умножения относительно сложения*).

Теперь научимся сравнивать числа из $\mathbb{R}$. Сначала определим, что значит $[x_n] > 0$.

Определение 3. Будем считать, что число $[x_n]$ *положительно*, тогда и только тогда, когда бесконечное число членов последовательности x_n положительно и x_n не является бесконечно малой.

8. Докажите корректность определения.

Теперь положим, что $[x_n] > [y_n]$, если $[x_n] - [y_n] > 0$.

9. Докажите, что мы получили порядок на $\mathbb{R}$, согласованный с $\mathbb{Q}$.

Аксиома полноты

Аксиома полноты для множества $\mathbb{Q}$, очевидно, выполнена в $\mathbb{R}$. Однако вдруг при заполнении промежутков в $\mathbb{Q}$ мы всё-таки заполнили не всё? Давайте проверим, что для множества $\mathbb{R}$ выполнена аксиома полноты для $\mathbb{R}$. Сформулируем её.

АП-1. Любое непустое ограниченное подмножество $A \subset \mathbb{R}$ имеет точную верхнюю грань.

АП-2. Любое сечение $\mathbb{R} = A \sqcup B$ имеет *границу*, то есть либо в B есть минимальный элемент, либо в A максимальный.

АП-3. Для каждой сходящейся последовательности вложенных отрезков из $\mathbb{R}$ существует единственная точка $x \in \mathbb{R}$, находящаяся внутри всех отрезков.

АП-4. Любая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

АП-5. Для любой ограниченной последовательности чисел существует сходящаяся подпоследовательность.

АП-6. Любая фундаментальная последовательность сходится.

Замечание 1. Здесь под пределом последовательности подразумевается предел в $\mathbb{R}$.

10. Пусть $[x_n] = a$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

ТЕОРЕМА 1. Условия 1)-6) эквивалентны.

Доказательство данной теоремы по сути повторяет доказательство аксиомы полноты для рациональных чисел.

ТЕОРЕМА 2. Аксиома полноты для $\mathbb{R}$ выполнена.

□ Докажем АП-1. Пусть A — непустое ограниченное подмножество в $\mathbb{R}$. Рассмотрим множество M :

$$M = \{q \in \mathbb{Q} \mid \exists a \in A : q \leq a\} \subset \mathbb{Q}$$

— подмножество $\mathbb{Q}$ из чисел, меньших хотя бы одного элемента из A .

11. а) Докажите, что для любого $a \in \mathbb{R}$ существует число $q \in \mathbb{Q}$, такое, что $q < a$. **б)** Докажите, что для любых $a, b \in \mathbb{R}$ существует $c \in \mathbb{Q}$ такое, что $a < c < b$.

в) Докажите, что M непусто и ограничено сверху элементом из $\mathbb{Q}$.

Так как любое непустое ограниченное подмножество из $\mathbb{Q}$ имеет точную верхнюю грань, у M есть точная верхняя грань $x = \sup M$.

Докажем, что x — это верхняя грань A . Пусть это не так, и существует число $a \in A$, $a > x$. Тогда существует рациональное число q такое, что $x < q < a$, а значит, $q \in M$, что противоречит определению x .

Пусть теперь $y < x$. Так как y не является точной верхней гранью M , существует $q \in M$ такое, что $y < q$. Следовательно, из определения M существует $a \in A$ такое, что $q \leq a$. Следовательно, $y < a$, тем самым доказано, что x — точная верхняя грань.

