

Аксиома полноты (сокращённый вариант). Версия 1.

Цель данного текста — немного приблизиться к пониманию того, что же такое есть действительные числа.

Мы очень хорошо знаем рациональные числа $\mathbb{Q}$. Умеем: складывать, перемножать и сравнивать эти числа. Но, если мы расположим эти числа на прямой, у нас окажется, что прямая заполнена не полностью. Например, там нет чисел $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π , и многих других. Чтобы заполнить пробел, нужно добавить к рациональным числам все «недостающие» промежутки.

Упорядоченные множества.

Прежде всего, давайте формально определим, что мы подразумеваем под порядком. Множество M называется *упорядоченным* (на самом деле часто в математике используется более общее определение, наше определение — определение линейно упорядоченного множества), если

1. Для любых двух элементов $x, y \in M$ выполнено ровно одно из трёх условий: $x > y$, $x = y$, $x < y$.
2. Если $x < y$ и $y < z$, то $x < z$.

Для упорядоченных множеств введем следующие понятия:

Определение 1. Точной верхней гранью или *супремумом* непустого множества $A \subset M$ называется такое $x \in M$, что выполнены два условия:

1. Для всех $a \in A$ выполнено неравенство $x \geq a$.
2. Если $y \in M$, $y < x$, то существует такое $a \in A$, что $y < a$.

Обозначение: $x = \sup A$.

1. Докажите, что если точная верхняя грань существует, то она единственна.

Определение 2. Сечением множества M называется разбиение M на два множества A, B , такое, что все элементы первого меньше всех элементов второго. Формально, требуются следующие условия:

1. A, B — непусты.
2. $A \cup B = M$, $A \cap B = \emptyset$ (Эти два условия обозначаются так: $A \sqcup B$).
3. $\forall a \in A, \forall b \in B \ a < b$.

Первые два условия полноты

Рассмотрим множество M , удовлетворяющее следующим условиям:

1. M содержит в $\mathbb{Q}$ как подмножество;
2. M — упорядоченное множество, согласованное с $\mathbb{Q}$ (то есть сравнение элементов в M согласованно со сравнением элементов в $\mathbb{Q}$).

Мы хотим написать условие на M , которое означает, что все «промежутки» в $\mathbb{Q}$ заполнены причём в каждом «промежутке» находится ровно одна точка. Мы сформулируем 6 таких условий и докажем их равносильность. Эти условия называются аксиомой полноты.

Сформулируем первые два условия:

АП-1. Любое непустое ограниченное подмножество $A \subset \mathbb{Q}$ имеет точную верхнюю грань в M .

АП-2. Любое сечение $\mathbb{Q} = A \sqcup B$ имеет *границу*, то есть $\exists ! c \in M: \forall a \in A \ \forall b \in B \ a \leq c \leq b$.

Замечание 1. Такие сечения называются *дедекиндовыми*.

Предел в M .

Формально не понятно, как определить предел в M , поскольку мы не умеем складывать числа из M . Однако можно определить понятие окрестности числа из M , а заодно и проверить сходится ли последовательность рациональных чисел к данному числу из M .

Определение 3. Пусть $x \in M$. Тогда ε -окрестностью данного числа x мы будем называть все рациональные числа $p, q \in \mathbb{Q}$ такие, что $p \leq x \leq q$ и $p - q < \varepsilon$. Формально:

$$U_\varepsilon(x) = \{q \in \mathbb{Q} \mid \exists p \in \mathbb{Q} : |q - p| < \varepsilon, x \in [p, q] \text{ или } x \in [q, p]\}$$

Определение 4. Пусть $x_n \in \mathbb{Q}$ — последовательность рациональных чисел. Число $x \in M$ называется пределом x_n , если x — единственный элемент M , для которого выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ x_n \in U_\varepsilon(x)$.
2. Для любого $\varepsilon > 0$ вне ε -окрестности x содержится лишь конечное число членов x_n .

2. Докажите, что условия эквивалентны.

Предложение 1. Пусть $a \in U_\varepsilon(x)$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда для любого $\omega > 0$ существует $p \in U_\omega(x)$.
□

По определению $U_\varepsilon(x)$ существует $b \in \mathbb{Q}$ такое, что $a + b \in U_\varepsilon(x)$ или $a - b \in U_\varepsilon(x)$. Для определённости предположим, что $a + b \in U_\varepsilon(x)$. Тогда либо $a < x < \frac{a+b}{2}$ и $a \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$, либо $\frac{a+b}{2} < x < a + b$ и $a + b \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$,
■

Вложенные отрезки.

Определение 5. Последовательностью вложенных отрезков называется пара последовательностей a_n, b_n такая, что $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$. Последовательность вложенных отрезков называется сходящейся, если $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$.

АП-3. Для каждой сходящейся последовательности вложенных отрезков из $\mathbb{Q}$ существует единственная точка $x \in M$, находящаяся внутри всех отрезков.

Сходимости последовательностей.

АП-4. Любая монотонная ограниченная последовательность рациональных чисел имеет предел в M .

Определение 6. Подпоследовательностью последовательности $a_n \in \mathbb{Q}$ называется последовательность, получаемая из данной вычеркиванием некоторого числа членов (так, что осталось бесконечное число). Если мы занумеруем оставшиеся члены: $n_1, n_2, n_3, n_4, \dots$, то последовательность будет иметь вид a_{n_k} .

АП-5. Для любой ограниченной последовательности рациональных чисел существует подпоследовательность с пределом в M .

Определение 7. Последовательность $a_n \in \mathbb{Q}$ называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N \ |a_n - a_m| < \varepsilon$.

3. Докажите, что любая сходящаяся последовательность фундаментальна.

АП-6. Любая фундаментальная последовательность рациональных чисел имеет предел в M .

Теорема 1. Условия 1)-6) эквивалентны.

□ (1 $\Rightarrow$ 2)

Предположим, что $\mathbb{Q} = A \sqcup B$ — дедекиндово сечение.

Множество A непусто по определению сечения, и ограничено сверху, так как B непусто, а любой элемент B ограничивает сверху A .

Значит, A — непусто и ограничено, по условию 1 имеет точную верхнюю грань $x = \sup A$.

Заметим, что по первому условию супремума, $x \geq a$ при всех $a \in A$. Предположим, что существует $b \in B$ такое, что $b < x$. Тогда по второму условию $\sup A$ найдётся такое $a \in A$, что $b < a$, что противоречит определению дедекиндова сечения. Отсюда $x \leq b$ при всех $b \in B$, а значит, x — граница.

□ (2 $\Rightarrow$ 4)

Пусть a_n — монотонно возрастающая ограниченная сверху последовательность. Пусть $c \in \mathbb{Q}$ — ограничение сверху. Рассмотрим множества $A = \{q \in \mathbb{Q} : \exists n \in \mathbb{N} \ a_n \geq q\}$, $B = \{q \in \mathbb{Q} : \forall n \in \mathbb{N} \ a_n < q\}$.

Множества A и B непусты: $a_n \in A$, $c \in B$, не пересекаются и в объединении дают всё $\mathbb{Q}$. Таким образом они задают дедекиндово сечение, а значит, существует граница x . Рассмотрим произвольную ε -окрестность $x \in U_\varepsilon(x)$ с $\varepsilon > 0$.

Так как $A \cup B = \mathbb{Q}$, то существуют элементы A и B , расстояние между которыми меньше ε : достаточно выбрать $\frac{1}{k} < \varepsilon$, тогда существуют $\frac{n}{k} \in A$ и $\frac{n+1}{k} \in B$. Следовательно, $\frac{n}{k}, \frac{n+1}{k} \in U_\varepsilon(x)$.

Возьмём произвольное $a \in A \cap U_\varepsilon(x)$. Тогда по определению A найдётся a_N такой, что $a_N > a$. Все a_n , при $n > N$ меньше любого элемента из B , а значит, $a_n \in U_\varepsilon(x)$. Отсюда вне окрестности a находятся лишь конечное число членов последовательности a_n , а значит, $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Единственность предела следует из единственности числа c .

□ $(4 \Rightarrow 3)$

Пусть $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$ — сходящаяся последовательность вложенных отрезков. Последовательность a_n , очевидно, является монотонно возрастающей, и ограниченной сверху (любым b_i). Поэтому она имеет предел x (по свойству 4).

Докажем, что x — искомая точка.

Во-первых, покажем, что при всех n $x \geq a_n$. Действительно, пусть $x < a_N$ при некотором $N \in \mathbb{N}$. Рассмотрим последовательность $c_n = a_N - \frac{1}{n}$. Эта последовательность монотонно возрастает, и сходится к a_N . Если $x \geq c_n$, то эта последовательность сходится и к x , а значит, $x = a_N$.

Полученное противоречие показывает, что существует M такое, что $x < c_M$. Отсюда взяв $\varepsilon = a_N - c_M$ мы получим, что a_M лежит вне ε -окрестности x . Из монотонности a_n следует, что все члены последовательности a_n с $n > N$ также лежат вне этой окрестности, что противоречит определению предела.

Теперь предположим, что найдётся N такое, что $x > b_N$. Тогда существует окрестность x , такая, что b_N не принадлежит этой окрестности. Значит, и все a_i лежат вне этой окрестности, что снова противоречит определению предела x .

Отсюда при всех n $a_n \leq x \leq b_n$. Пусть есть ещё одна точка y , лежащая внутри всех отрезков. Тогда $y = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, но у последовательности есть только один предел, а значит, $x = y$.

□ $(3 \Rightarrow 5)$

Рассмотрим произвольную ограниченную последовательность c_n рациональных чисел. Пусть она ограничена числом $C \in \mathbb{Q}$. Рассмотрим отрезок $[-C; C]$, на нём находится все члены последовательности. Положим $a_1 = -C$, $b_1 = C$. Разделим отрезок пополам и выберем ту половину, в которой лежит бесконечное число членов нашей последовательности. Обозначим эту половину отрезка за $[a_2; b_2]$. Снова разделим отрезок, выберем половину с бесконечным количеством членов, и так далее. В итоге получим последовательность вложенных отрезков.

Так как $a_n - b_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} - b_{n-1})$, то $a_n - b_n$ — бесконечно малая последовательность. Следовательно, существует единственная точка x внутри всех отрезков $[a_n, b_n]$. Построим подпоследовательность c_{k_j} следующим образом. Выберем произвольное число внутри отрезка $c_{k_1} = [a_1, b_1]$. Из членов последовательности с номерами, больше, чем k выберем тот, который лежит внутри отрезка $[a_2, b_2]$ (такой найдётся, потому что отрезок $[a_2, b_2]$ содержит бесконечное число членов последовательности). Обозначим через c_{k_j} полученную подпоследовательность.

Очевидно, что в любой окрестности x содержатся все отрезки $[a_n, b_n]$, кроме конечного числа. Тогда там содержатся все члены последовательности c_{k_j} , кроме конечного числа. Отсюда $x = \lim_{j \rightarrow \infty} c_{k_j}$.

□ $(5 \Rightarrow 6)$

Пусть a_n — фундаментальная последовательность. Она ограничена, значит существует сходящаяся подпоследовательность a_{n_k} , $x = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Найдём такое N , что, с одной стороны, при всех $m, n > N$ $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$, с другой стороны, при всех $n_k > N$, $a_{n_k} \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Это означает, что все a_n , $n > N$ лежат в ε -окрестности x , откуда x является пределом a_n .

□ $(6 \Rightarrow 1)$

Предположим, что $A \subset \mathbb{Q}$ — непустое ограниченное сверху подмножество. Пусть ограничение сверху задаётся числом $C \in \mathbb{Q}$, $a \in A$ — произвольный элемент. Построим последовательность вложенных отрезков: первый отрезок определим так: $a_1 = a$, $b_1 = C$. Разделим отрезок пополам, и возьмём правую половину если и только если она пересекается с A . Далее продолжим делить отрезок пополам.

Заметим, что правый конец отрезка b_n всегда не меньше всех элементов A , а для любого a_n существует элемент A , не меньший его.

Рассмотрим последовательность $x_n = \frac{b_n - a_n}{2}$. Так как отрезки вложены друг в друга, а $b_n - a_n$ — бесконечно малая последовательность, то для каждого отрезка $[a_N, b_N]$ все члены последовательности x_n , начиная с N -ого, лежат внутри этого отрезка. Отсюда следует фундаментальность (для каждого $\varepsilon > 0$ найдём N такое, что $b_N - a_N < \varepsilon$, и тогда при всех $m, n > N$, $|x_m - x_n| < \varepsilon$).

Отсюда по предположению, у фундаментальной последовательности x_n есть предел x . Докажем, что $x = \sup A$.

Прежде всего, по построению, пересечение $[a_n, b_n] \cap A \neq \emptyset$. Это означает, что для любого числа $y \in \mathbb{Q}$, $y < x$ найдётся отрезок $[a_n, b_n]$ такой, что $y < a_n$, а значит, и элемент $a \in A$, такой, что $y < a$.

С другой стороны, пусть существует элемент $a \in A$ такой, что $x < a$. Опять же, тогда существует отрезок $[a_n, b_n]$, такой, что $b_n < a$. Но по построению, b_n не меньше всех элементов a . Полученное противоречие доказывает утверждение.

