

Определение 1. Логарифмом числа b по основанию a называется такое число c , что $a^c = b$. Обозначение: $c = \log_a b$.

Для существования логарифма **необходимо предполагать**, что $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

ТЕОРЕМА 1. Если $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, то $\log_a b$ существует и единственен.

Свойства логарифма.

При всех $a, b, c > 0$, $a, b, c \neq 1$, $\alpha \neq 0$ выполнены следующие свойства:

1. (Основное логарифмическое тождество) $a^{\log_a b} = b$;
2. $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$;
3. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$, $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$;
4. $\alpha \log_a b = \log_a b^\alpha$; $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$;
5. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$;
6. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Замечание 1. Часто используется следующее обозначение: $\log_{10} a = \lg a$.

Задачи.

1. Докажите свойства 1 – 6.

2. Докажите тождества:

- а) $\log_a bc = \log_a |b| + \log_a |c|$, при $a > 0$, $a \neq 1$, $bc > 0$; б) $-\log_a b = \log_{\frac{1}{a}} b = \log_a \frac{1}{b}$, при $a, b > 0$, $a, b \neq 1$;
 в) $\log_a b \log_b c \log_c a = 1$ при $a, b, c > 0$, $a, b, c \neq 1$; г) $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ при $a, b, c > 0$, $b \neq 1$.

3. Вычислите:

- а) $-\log_2 \log_2 \sqrt[4]{2}$; б) $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$;
 в) $\frac{(27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25} 49})(81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9})}{3 + 5^{\frac{1}{\log_{16} 25}} \cdot 5^{\log_5 3}}$; г) $\frac{81^{\frac{1}{\log_5 9}} + 3^{\frac{3}{\log_{\sqrt{6}} 3}}}{409} \cdot \left((\sqrt{7})^{\frac{2}{\log_{25} 7}} - 125^{\log_{25} 6} \right)$;
 д) $\frac{\log_3 24}{\log_{72} 3} - \frac{\log_3 216}{\log_8 3}$; е) $\log_3 2 \log_4 3 \dots \log_{10} 9 \log_{11} 10$; ж) $\lg \lg 1^\circ + \lg \lg 2^\circ + \dots + \lg \lg 89^\circ$;
 з) $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$; и) $2^{\sqrt{\log_2 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}}$; к) $\frac{40^{\sqrt[3]{\log_{40} 8}}}{8^{\sqrt[3]{\log_8^2 40 - \frac{1}{3}}}}$;

4.

а) Дано: $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$. Найдите $\log_{30} 8$. б) Дано: $\lg 2 = a$, $\log_2 7 = b$. Найдите $\lg 56$.

в) Дано: $\log_6 15 = a$, $\log_{12} 18 = b$. Найдите $\log_{25} 24$. г) Дано: $\log_b a = \sqrt{3}$. Найдите $\log_{(b^3 \sqrt[3]{a^5})} \frac{\sqrt[3]{a}}{b\sqrt{b}}$.

д) Дано: $\log_y x = a$, $\log_z x = b$. Найдите $\log_{\sqrt[3]{xyz}} \left(\frac{yz}{x^3} \right)^2$.

е) Известно, что для некоторой тройки чисел x, y, z ($x \neq y$) выражения $\log_{(x^5 y^2 z)} \frac{\sqrt[3]{x^2 y}}{z}$ и $\log_{(x^2 y^5 z)} \frac{\sqrt{xy}}{z}$ равны одному и тому же числу. Найдите это число.

5. Найдите области определения следующих функций:

- а) $f(x) = \lg(x^2 - 5x + 6)$; б) $f(x) = \log_2 \frac{x-2}{x+3}$; в) $f(x) = \log_2(x-2) - \log_2(x+3)$;
 г) $f(x) = \log_5(x^2 - x - 2)$; д) $f(x) = \log_2(x-2) + \log_2(x+1)$; е) $f(x) = \lg(x^2 + x + 2)$;
 ж) $f(x) = \lg \frac{x^4 - 10x^2 + 9}{7-x}$; з) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 4)$.

6. Сравните числа:

- а) $\log_{\frac{1}{3}} 5$ и $\log_{\frac{1}{3}} 7$; б) $\log_2 7, 3$ и $\log_2 7, 5$; в) $\log_3 \frac{1}{5}$ и $\log_3 \frac{1}{6}$; г) $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{7}$ и $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{9}$;
 д) $\log_2 7$ и $\log_3 7$; е) $2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5}$ и $3 \log_8 26$; ж) $\log_5 \frac{1}{3}$ и $\log_7 \frac{1}{3}$; з) $\log_2 5$ и 2 ;
 и) $\log_2 5$ и $\frac{5}{2}$; к) $\log_2 20$ и $\log_3 80$; л) $\log_5 130$ и $\log_3 25$; м) $\log_{189} 1323$ и $\log_{63} 147$;
 н) $\log_2 3$ и $\log_3 4$; о) $\log_9 10$ и $\log_{10} 11$.

7. Решите неравенства:

- а) $\log_{\frac{1}{3}}(x+5) < 2$; б) $\log_2(x-3) < 1$; в) $\log_5(2x+1) \geq 0$; г) $\log_{\frac{1}{2}}(3x-2) \geq -1$;

- д)** $\log_2 \frac{x-2}{x+5} \leq 1$; **е)** $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x-1}{x+4} < 1$; **ж)** $\log_2(x^2 + x + 4) \leq 2$; **з)** $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+2} < 1$;
и) $\log_3 \frac{3x-5}{x+1} \leq 1$; **к)** $\log_{0,3}(x^2 - 5x + 7) > 0$; **л)** $\log_{\pi}(x+27) - \log_{\pi}(16-2x) < \log_{\pi} x$;
м) $\log_{0,3}(3x-8) > \log_{0,3}(x^2+4)$; **н)** $2\log_8(x-2) - \log_8(x-3) > \frac{2}{3}$; **о)** $5^{\log_5 \frac{x-2}{x}} < 1$;
п) $\log_4(x+7) > \log_2(x+1)$; **р)** $\log_2(1 + \log_{\frac{1}{9}} x - \log_9 x) < 1$; **с)** $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2-5x+8)} \leq 2, 5$;
т) $0, 3^{\log_{\frac{1}{3}} \log_2 \frac{3x+6}{x^2+2}} > 1$; **у)** $\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x - 2 \leq 0$; **ф)** $\frac{3x^2-16x+21}{\log_{0,3}(x^2+4)} < 0$;
х) $\log_2(x^2-4) - 3\log_2 \frac{x+2}{x-2} > 2$; **ц)** $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) \geq -2$; **ч)** $\sqrt{\log_3(9x+18)} \leq \log_3(x+2)$;
ш) $\sqrt{\log_9(3x^2-4x+2)+1} > \log_3(3x^2-4x+2)$; **щ)** $\frac{x-1}{\log_3(9-3^x)-3} \leq 1$; **э)** $\frac{\log_5(x^2-4x-11)^2 - \log_{11}(x^2-4x-11)^3}{2-5x-3x^2} \geq 0$.

8. Решите уравнения:

- а)** $\lg 5 + \lg(x+10) = 1 - \lg(2x-1) + \lg(21x-20)$; **б)** $\lg(x+1, 5) = -\lg x$;
в) $\log_5 \sqrt{x-9} - \log_5 10 + \log_5 \sqrt{2x-1} = 0$; **г)** $\log_5(x-2) + \log_{\sqrt{5}}(x^3-2) + \log_{0,2}(x-2) = 4$;
д) $x(\lg 5 - 1) = \lg(2^x + 1) - \lg 6$; **е)** $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$; **ж)** $\log_2(4 \cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$;
з) $\lg(3x^2 + 12x + 19) - \lg(3x + 4) = 1$; **и)** $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\log_{10}(3-x)}$; **к)** $\lg^2(100x) + \lg^2(10x) = 14 + \lg \frac{1}{x}$;
л) $1 + \log_x(4-x) = \log_5 3 \cdot \log_x 5$; **м)** $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2+23x+21) = 4$;
н) $7^{\lg x} - 5^{\lg x+1} = 3 \cdot 5^{\lg x-1} - 13 \cdot 7^{\lg x-1}$; **о)** $25^{\lg x} = 5 + 4x^{\lg 5}$; **п)** $x^{\lg 9} + 3^{\lg x} = 12$;
р) $\log_x(2^{\lg x} - 9 \lg^3 x + 81 \lg x) = 2$; **с)** $16^{\frac{x-1}{x}} \cdot 5^x = 100$; **т)** $4^x \cdot 3^{\frac{x}{x-1}} = 144$;
у) $\frac{x}{40} = 5^{\log_x 200}$; **ф)** $\log_{\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}}(x^2 + 4x - 2) = \log_{\frac{1}{2-\sqrt{3}}}(x^2 + 4x - 3)$.

9.

- а)** $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4, \\ \log_4(x+y) = \frac{3}{2}; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \lg 5 \cdot \lg \frac{5}{x} = \lg 7 \cdot \lg \frac{7}{y}, \\ \lg x \cdot \lg 7 = \lg y \cdot \lg 5; \end{cases}$
в) $\begin{cases} \lg^2 x = \lg^2 y + \lg^2 xy, \\ \lg^2(x-y) + \lg x \cdot \lg y = 0; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} \log_{\frac{2}{3}}^2 x + \log_{\frac{2}{3}}^2 y - \log_{\frac{2}{3}}^2(x+y) = 1, \\ \log_{\frac{3}{2}} x \cdot \log_{\frac{3}{2}} y + \log_{\frac{3}{2}}(x+y) = 0. \end{cases}$

10. **а)** Найдите сумму корней уравнения $\frac{x+1}{2} = \log_2(2^x + 3) - \log_4(1978 - 2^{-x})$.

б) Найдите произведение корней уравнения $(3x)^{3 \log_6 2x-4} = 1978 \cdot x^{\log_6 x}$.