Доказательство существования степени и логарифма.

Версия от 21.09.2011. Приветствуются замечания и дополнения!!!

Рассмотрим функцию $y = a^x$, где $a > 0, a \neq 1$. Пока что мы определили её только для рациональных чисел.

1. Докажите монотонность $y = a^x$.

Наша цель сначала — определить степень a^x для любого числа x. Для этого докажем следующую теорему:

Теорема 1. *Зафиксируем $a > 1$, x. Тогда существует и единственно такое число b, что для любых $p, q \in \mathbb{Q}$, $p < x < q$ выполнено $a^p < b < a^q$.*

Лемма 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $q \in \mathbb{Q}$ такое, что $a^q - 1 < \varepsilon$.*

□ Существует n такое, что $(1+\varepsilon)^n > a$ (Задача из листка «Неравенства и оценки»). Возьмём $q = \frac{1}{n}$. Имеем:

$$(1+\varepsilon)^n > a \Leftrightarrow 1 + \varepsilon > a^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow 1 + \varepsilon > a^q \Leftrightarrow a^q - 1 < \varepsilon.$$

■

Лемма 2. *Для любого $\varepsilon > 0$ существуют $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ такие, что $q_1 < x < q_2$ и $a^{q_2} - a^{q_1} < \varepsilon$.*

□ Пусть b — произвольное целое число, большее x. По предыдущей лемме найдём $q \in Q$ такое, что $a^q - 1 < \dfrac{\varepsilon}{a^b}$.

Существуют $q_1 < x < q_2$ такие, что $q_2 - q_1 = q$. Тогда $a^{q_2} - a^{q_1} = a^{q_1}(a^{q_2-q_1} - 1) < a^b \cdot (a^q - 1) < a^b \cdot \dfrac{\varepsilon}{a^b} = \varepsilon$.

■

□ (Доказательство теоремы). Рассмотрим все рациональные степени числа a и разобьём их на два множества : $M = \{a^q | q \in \mathbb{Q}, q < x\}$, $N = \{a^q | q \in \mathbb{Q}, q > x\}$.

Рассмотрим множество чисел, больших всех чисел из M и меньше всех чисел из N, обозначим его через B:

$$B = \{x | \forall y \in M,\ \forall z \in N\ \ y < x < z\}$$

Из монотонности следует, что любое число из M меньше любого числа из N, а значит, B непусто. С другой стороны, по предыдущей лемме, для каждого $\varepsilon > 0$ существуют $y \in M$, $z \in N$ такие, что $|y - z| < \varepsilon$. То есть, если взять две точки $x_1, x_2 \in B$, то $|x_1 - x_2| < |y - z| < \varepsilon$ для произвольного $\varepsilon > 0$, а значит $x_1 = x_2$. Значит, B состоит из одной точки b, которая является искомой.

■

Положим по определению $b = a^x$. Таким образом определим a^x для любого числа x.

Лемма 3. *По нашему определению получившаяся функция a^x монотонна.*

2. Докажите Лемму 3.

Теорема 2. *Для любого $a > 1$, $y > 0$ существует x такое, что $a^x = y$.*

□ Разобьём множество рациональных чисел на два множества: $\widetilde{M} = \{q \in \mathbb{Q} | a^q < y\}$, $\widetilde{N} = \{q \in \mathbb{Q} | a^q > y\}$.

3. Докажите, что $\widetilde{M}$,$\widetilde{N}$ — непустые множества.

Очевидно, что любое число из $\widetilde{M}$ меньше любого числа из $\widetilde{N}$. Тогда существует и единственно число x такое, что оно больше $\widetilde{M}$ и меньше $\widetilde{N}$ (существование - аксиома действительных чисел, единственность следует из существования рационального числа на любом отрезке).

Надо доказать, что $a^x = y$. Предположим, что это не так, и $a^x < y$. Тогда по Лемме 2 существуют такие $q_1 \in \widetilde{M}$,$q_2 \in \widetilde{N}$, что $a^{q_2} - a^{q_1} < \frac{y - a^x}{2}$. Следовательно,

$$a^{q_2} < a^{q_1} + \frac{y - a^x}{2} < a^x + \frac{y - a^x}{2} < a^x + y - a^x = y.$$

Отсюда мы получили, что $a^{q_2} < y$, что противоречит тому, что $q_2 \in \widetilde{N}$. Полученное противоречие доказывает, что $a^x \geqslant y$.

4. Докажите аналогичным образом, что неравенство $a^x > y$ не может быть выполнено.

Таким образом, $a^x = y$, что и требовалось доказать.

■

5. Сформулируйте и докажите обе теоремы для $0 < a < 1$.

Теорема 3. *При $a \neq 1$, $a, b > 0$ существует и единственно такое число c, что $a^c = b$.*

□ Существование следует из предыдущей теоремы.

6. Докажите единственность.

■

Теорема 4. *Пусть $a > 1$, x, y — произвольные числа. Тогда выполнены следующие свойства степени:*

1. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$;
2. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$.

□

Докажем первое равенство. Для $q_1 < x < q_2$, $r_1 < y < r_2$ выполнено неравенство $a^{q_1} \cdot a^{r_1} = a^{q_1+r_1} < a^{x+y} < a$
С другой стороны, ясно, что $a^{q_1} \cdot a^{r_1} < a^x \cdot a^y < a^{q_2} \cdot a^{r_2}$.

7. Докажите, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдутся $q_1 < x < q_2$, $r_1 < y < r_2$ такие, что $a^{q_2} \cdot a^{r_2} - a^{q_1} \cdot a^{r_1} < \varepsilon$.

Из задачи очевидно следует, что $|a^x \cdot a^y - a^{x+y}| < \varepsilon$ для произвольного ε, значит $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

8. Докажите второе равенство.

■